

相似夹角定理及其在图形学上的应用

丁国正 余世明 周德龙

(浙江工业大学信息工程学院, 杭州 310012)

摘要 以平面图形经过欧氏变换后的不变性质定理——相似夹角定理为理论基础,通过构造一个夹角波动方差函数可用来衡量两条边缘轮廓曲线的相似程度,进而形成了一种图形边缘相似度算法,从而为图形匹配、图形搜索、图形有效相似变换和聚类等提供了一种合理的方法。通过理论论证与实验表明,该方法确能有效反映曲线间的相似程度。

关键词 图形边缘相似 相似度 图形匹配 图形搜索

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)01-0155-06

Similitude Included Angle Theorem and Application in Graphics

DING Guo-zheng, YU Shi-ming, ZHOU De-long

(College of Information and Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310012)

Abstract In this paper we bring forward an image edge similitude extent algorithm based on the steadiness character theorem of plane similitude graphics—similitude included angle theorem, and the algorithm is realized by constructing an AFMSDF (mean-square deviation function of angle fluctuation). The AFMSDF is used as a method of scaling the similitude extent of two different edge contours. This algorithm provides a reasonable method for graphic match, graphic search, efficient graphic similitude transform, and clustering, etc. Theoretical analysis and experiments indicate that the method is feasible.

Keywords graphic edge similitude, similitude extent, graphic match, graphic search

1 引言

利用轮廓线的特征来识别图像,以便使对图像的认识降维成对其边缘进行检测和对其边缘的几何特征进行识别,是图形图像研究的重要方法。对图像边缘进行检测的方法已有多种^[1-3],而对图像边缘的几何特征进行的研究,则由于理论基础不严密,这方面的研究论文尚不多,目前主要是集中在边缘曲线的导函数研究与统计假设基础之上^[4-6],但在边缘检测中,由于噪声的干扰可能引起畸变,从而产生了大量畸点,如果经过滤波,就不得不考虑对图形局部的影响,但在匹配或识别

中,却要用到局部的几何特征(主要是曲率),这样很难仅从局部就能获得精确的几何信息,用来实现匹配或识别。本文整体上是以发现的平面相似图形的一个不变性质定理——相似夹角定理(定理1和定理2)为基础,一方面提出采用内接多边形搜索法来获取对应点(即特征信息点);另一方面通过构造一个夹角波动方差函数来整体衡量两条边缘轮廓曲线的相似程度,即量化它们的相似程度。这种算法不仅避免了由于对边缘轮廓的曲线导函数的不存在和几何特征积分的可能不收敛而导致的算法失效,而且对于边缘轮廓的曲线特征要求是很松弛的。本文将着重用数学的方法来证明这一方法的可行性,同时通过理论分析、

基金项目:国家自然科学基金项目(F60572077)

收稿日期:2007-02-05;改回日期:2007-07-10

第一作者简介:丁国正(1982~),男,2007年获浙江工业大学硕士学位。主要从事嵌入式系统研究、数学哲学研习。E-mail:

dinggz1982@163.com

举例说明和与典型算法的比较来说明它的有效性。

2 理论基础

定义 1 如果有两个图形,其中任意一个经过放大、平移、旋转后与另一个成镜像对称,则称它们是平面超镜像对称的。

命题 1 欧氏平面上任意两个位置确定的,且非平面超镜像对称的三角形,其相似的充要条件是其对应边所成的夹角相等。

为了证明这一命题,需先引入如下引理:

引理 1 欧氏平面上任意两个非平面超镜像对称的角,其相等的充要条件是其对应边所成的夹角相等。

证明 平面上 $\angle A_1O_1B_1$ 与 $\angle A_2O_2B_2$ 的所有位置关系均可以转化成图 1 的两种形式。

如图 1 (b) 所示,若 $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$,则很容易得 A_1O_1 和 A_2O_2 所成的夹角 $\angle A_2CO_1$ 与 O_1B_1 和 O_2B_2 所成的夹角 $\angle B_1DO_2$ 相等。反之,若 A_1O_1 和 A_2O_2 所成的夹角 $\angle A_2CO_1$ 与 O_1B_1 和 O_2B_2 所成的夹角 $\angle B_1DO_2$ 相等,则 $\angle A_1O_1B_1 = \angle A_2O_2B_2$ 证毕。

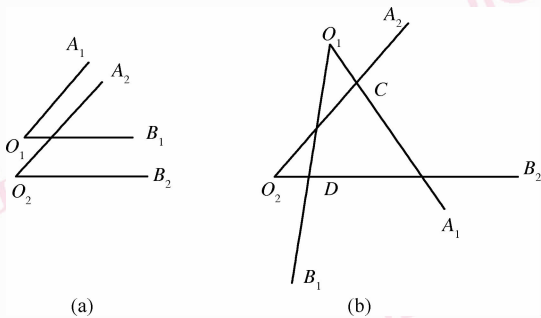


图 1 平行角与交叉角

Fig. 1 Parallel angles and across angles

命题 1 的证明

(1) 必要性 如图 2 所示, $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$, 则有 $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$, 由引理 1 可知, 由 A_1B_1 和 A_2B_2 所成的夹角 $\angle A_1DB_2$ 与由 B_1C_1 和 B_2C_2 所成的夹角 $\angle C_2EB_1$ 相等。如果将三角形看作由 3 个顶角组成, 则同样可得, A_1C_1 和 A_2C_2 所成的夹角与 B_1C_1 和 B_2C_2 所成的夹角相等, 这样的两两相等即可得所有夹角相等。

(2) 充分性 如果 A_1B_1 和 A_2B_2 所成的夹角与

B_1C_1 和 B_2C_2 所成的夹角相等, 则由引理 1 可得 $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_2B_2C_2$, 同样可得 $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_2C_2B_2$, $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_2C_2$, 从而可得 $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$ 证毕。

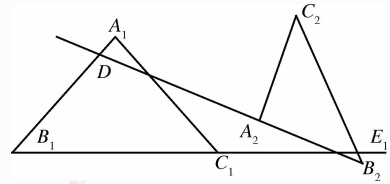


图 2 交叉相似三角形

Fig. 2 Across similitude triangles

定义 2 对于任意的平面多边形, 可将从某一顶点出发逐一连接尽可能多、不重复、以隔一个顶点的顶点所连接成的折线定义为多边形的内接线。显然, 多边形的内接线最多两条。

定理 1 欧氏平面上任意两个位置确定, 且非平面超镜像对称的多边形, 其相似的充要条件是其对应边和对应内接线或其延长线所成的夹角相等。

证明

(1) 必要性 多边形 $A_1A_2 \dots A_n \sim$ 多边形 $B_1B_2 \dots B_n$, 其各自的内接线 $A_1A_3, \dots, B_1B_3, \dots$ 与 $A_2A_4, \dots, B_2B_4, \dots$ 将它们组合成 $\triangle A_1A_2A_3, \triangle A_2A_3A_4, \dots$ 由命题 1 的必要性可得, 若 $\triangle A_1A_2A_3, \triangle A_2A_3A_4, \dots$ 其两两对应边所成的夹角相等, 则可得所有夹角相等, 即其所有对应边和对应内接线或其延长线所成的夹角相等。

(2) 充分性 由多边形 $A_1A_2 \dots A_n$ 和多边形 $B_1B_2 \dots B_n$, 以及由内接线 $A_1A_3, \dots, B_1B_3, \dots, A_2A_4, \dots, B_2B_4, \dots$ 所成的夹角相等, 由命题 1 的充分性可知, $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3, \triangle A_2A_3A_4 \sim \triangle B_2B_3B_4, \dots$, 从而 $\frac{A_1A_2}{B_1B_2} = \frac{A_2A_3}{B_2B_3} = \frac{A_3A_4}{B_3B_4} = \dots$, 即多边形 $A_1A_2 \dots A_n$ 和多边形 $B_1B_2 \dots B_n$ 所对应的边成比例, 综上两者可得, 多边形 $A_1A_2 \dots A_n \sim$ 多边形 $B_1B_2 \dots B_n$ 。证毕。

推论 1 欧氏平面上任意两条位置确定且非平面超镜像对称的折线, 其相似的充要条件是其对应边所成的夹角相等。

证明 若将折线的两个端点连接, 则问题还原成了定理 1, 显然去掉这条连接线定理 1 也应该成立。

定义 3 如果两条曲线中的任意一条经过放大、平移、旋转、翻转后可与另一条重合, 则称它们是

相似曲线。

定理 2 欧氏平面上任意两个位置确定的且非平面超镜像对称的曲边图形,如果它们处处可导,则它们相似的充要条件是由它们的任意一对对应的可导点的切线所成的夹角为定值。

证明 由于曲线处处可导,因此由微分几何知识知道,可将曲线看作是由任意小的线段组成,这些线段可等价于其上的可导点的切线,由于这些线段可以任意小,故它们就是内接多边形及其内接线,这样定理 2 就等价于定理 1。证毕。

为了方便起见,可将“任意一对对应边、对应内接线或其延长线、对应的可导点的切线所成的夹角确定为定值”这样的性质简称为相似夹角性质,这样的夹角可称为相似夹角。而将定理 1 和定理 2 统称为相似夹角定理。由相似夹角定理可知,要判别两个图形不相似,仅要,也仅需判别这两个图形是否具有相似夹角性质即可。事实上,由于各种工具的测量误差及外界的干扰,在实际图形处理中,对图形的识别并不严格要求具有相似夹角性质,而允许有一定的偏差。为此,本文给出了独立跨度和相似度的概念,用来衡量它们的相似程度。

定义 4 从任意两个曲边形上的各自的一点出发以各自的一定的长度取点组成两个点集,如果这些点的切线均具有相似夹角性质,则将这两个点集的基数的比值称为相似度,并规定它为小基数比大基数。它们各自所取的一定的长度,称为独立跨度。为了实际操作的需要,将在下一节用等效处理来进行说明。

相似度反映的是整体的相似程度,而独立跨度则反映的是每个局部的相似程度。下面给出两个图形全等的充分条件:

命题 2 如果两个图形的相似度为 1,且独立跨度为无穷小量,则这两个图形全等。

证明 如果独立跨度为无穷小量,则图形的边界线处处可导,由定理 2 即可得到这两个图形相似,又由于相似度为 1,故这两个图形全等。证毕。

3 图形学上的应用及算法实现

对于实际的图形间的相似度处理,通常是用计算机来获取图形边界的几何信息。如果用点间的向量来代替斜率,用夹角来代替曲率,那么就可以避开

不可导的问题,于是由相似夹角定理可以得到如下一个结论:

命题 3 如果两个图形的各对应边或对应点的切线的相似夹角值波动越大,则它们相似程度越低。

具体的算法主要包括建立标准样本图形数据库、建立临时样本图形数据库、寻找对应点及各自的合理独立跨度、计算夹角波动方差函数 AFMSDF 值(具体流程见图 3)。

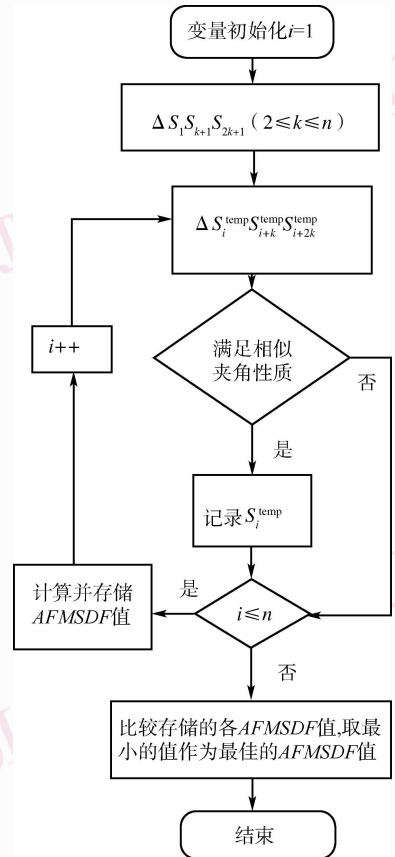


图 3 算法流程图

Fig. 3 Algorithm flow chart

3.1 样本图形数据库

样本图形数据库主要包括边界点的坐标及各跨点的斜率或向量。在确定不变的像素下,假定标准样本图形可以近似获得 $p \times n$ 个点,则可以以间隔 $(p - 1)$ pixels 依次取 n 个点;假定临时样本图形可以近似获得 $q \times n$ 个点,则可以以间隔 $(q - 1)$ pixels 依次取 n 个点,通常可取标准样本和临时样本的最大公倍数 (p, q) , $n \in N$ 。样本图形数据是以标准样本的 n 个点为标准,将临时样本点分成 q 个组,记为如下的标准样本的边缘样本点:

$$S_1 = (x_1, y_1), S_2 = (x_p, y_p), \dots, S_n = (x_{n \times p}, y_{n \times p})$$

将临时样本的边缘样本点组记为

$$\{S_{1,1}^{\text{temp}} = (x_1, y_1), S_{1,2}^{\text{temp}} = (x_q, y_q), \dots,$$

$$S_{1,n}^{\text{temp}} = (x_{n \times q}, y_{n \times q})$$

$$S_{2,1}^{\text{temp}} = (x_2, y_2), S_{2,2}^{\text{temp}} = (x_{2+q}, y_{2+q}), \dots,$$

$$S_{2,n}^{\text{temp}} = (x_{2+n \times q}, y_{2+n \times q})$$

.....

$$S_{q,1}^{\text{temp}} = (x_q, y_q), S_{q,2}^{\text{temp}} = (x_{2,q}, y_{2,q}), \dots,$$

$$S_{q,n}^{\text{temp}} = (x_{n \times q}, y_{n \times q}) \}$$

其中, S_n ($n = 1, 2, \dots, q$) 表示第 n 个点的坐标为 $(x_{n \times k}, y_{n \times k})$, 点 $S_{k,n}^{\text{temp}}$ ($k = 1, 2, \dots, q$) 表示第 k 组的第 n 个点的坐标为 $(x_{n \times k}, y_{n \times k})$.

标准样本边缘的跨点斜率或向量为

$$k_{i,j} = \frac{y_{1+i \times (j-1)} - y_{1+i \times j}}{x_{1+i \times (j-1)} - x_{1+i \times j}}$$

$$(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n, i, j \in N)$$

其中, 记 $k_{i,j}$ 为向量 $\vec{S}_i \vec{S}_{i+j}$ 的斜率, 当斜率不存在时 (向量 $\vec{S}_i \vec{S}_{i+j}$ 垂直于 X 轴), 可用 90° 取代 $k_{i,j}$. 并规定: 当 $i+j \geq n$ 时, S_{i+j} 记为 S_{i+j-n} .

3.2 对应点的寻找及独立跨度

影响算法有效性的主要因素之一是“对应点”的寻找, 本文根据相似夹角定理提出了一种遍寻方法, 其主要思想是: 由相似夹角定理可得, 若两个曲边图形相似, 则其内接多边形具有相似夹角性质。这样就可以通过寻找这样的内接多边形来获得对应点, 而对于各组临时样本的分别搜索, 则为了减少搜索量, 一般可取三角形或四边形。

这样寻找到的对应点可能有多个, 可将其全部记录存储, 在 3.3 小节再做有效处理。由于此算法是采用不同图形取相同点数的方法。因此, 第 2 节的独立跨度将用如下等效处理: 将以样本点为顶点的内接多边形的各边长度的均值作为其独立跨度。

3.3 夹角波动方差函数与相似度

两个图形的相似程度, 由前面的一系列相似夹角性质可以看出, 它决定于其具有相似夹角性质的内接多边形的边数, 这在直观上也是可以如此理解的, 如果它们的无穷多边形内接多边形是相似的, 那么可以说它们是相似的。由此就可以在理论上将相似程度定义为此种多边形的边数极限与设立的标准内接边数 (由具体要求的相似程

度精度决定) 之比。但在实际判定图形相似度中, 由于图形边缘的畸变及获取边缘时的噪音干扰, 使得很难用上述理论的理想方法来判定其相似程度, 为此给出了基于相似夹角定理的一个夹角波动方差函数, 用来代替上述理论上的理想方法, 其理论依据为命题 3。

$$\text{夹角波动方差函数 } AFMSDF(a) = \sum_{v=1}^n (a_i - a)^2,$$

其中 a_i 为标准样本边缘跨点向量 $\vec{S}_i \vec{S}_{i+j}$ 与各含有对应点的临时样本点组中的边缘跨点向量 $\vec{S}_i^{\text{temp}} \vec{S}_{i+j}^{\text{temp}}$ 的夹角; 夹角的均值 $a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ 。函数所求得值,

其有效域可由标准样本之间的 $AFMSDF(a)$ 的比值和具体要求的相似程度的精度来决定 (假定为大于等于 1)。夹角波动方差函数是对于单个的对应点所获得的值, 而对于多个对应点来说, 则先依次获取各对应点的函数值, 再取最小值 (最相似) 作为最佳的夹角波动方差函数值。以通过搜索内接三角形寻找得到的对应点来获取夹角波动方差函数值为例的算法流程图如图 3 所示。图中“计算并存储 $AFMSDF$ 值”的过程 3.1 节已说明, 不再另写流程。

4 理论实验举例

由上面提出并证明的相似夹角定理可知, 夹角的波动与图形的相似程度是等价的 (定理的充分且必要条件), 这就从理论上保证了利用 $AFMSDF$ 值来判定图形间的相似度的可行性。

由于曲边图形的相似程度通常很难用直觉来感受, 为了既能在直觉上感受, 也能更一般地说明夹角波动方差函数的有效性, 本文所举的图形实例, 是以具代表性的圆锥曲线和圆内接多边形给出, 同时以另一组一般化的图形为例来说明, 并与典型的以导函数为特征的相似度算法^[4-6]做比较, 算法的评判标准就是有效区分 (能有效区分直观上比较“接近”的图形; 能对直观上难以判别的图形, 按相似度进行有效排列), 这种有效性体现在由算法获得的能反映相似度的数值间的差别。

例 1: 标准样本 (图 4(a)), 其方程为 $x^2 + y^2 = 1$

临时样本①为椭圆形 (图 4(b) ~ 图 4(g)), 其方程为 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$ ($0 < a \leq 1$)

临时样本②为正 n 边形

例 2:标准样本为正方形(图 5(a))

临时样本③为一般典型图形(图 5(b)~图 5(g))

例 1 用来说明曲线与曲线、曲线与直边多边形的相似度判定。

例 2 用来说明直边多边形与直边多边形的相似度判定。

样本附图见图 4,图 5;实验结果见表 1,表 2,表 3。

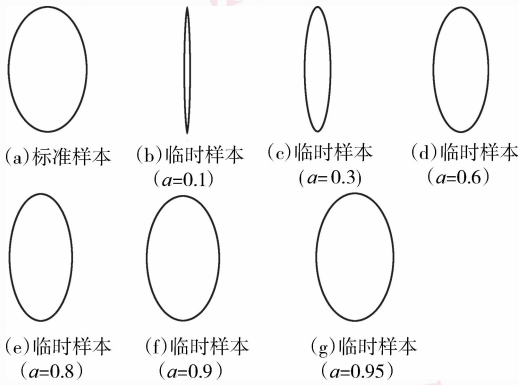


图 4 标准样本与临时样本对照

Fig. 4 The comparison between standard sample and temporary sample pictures

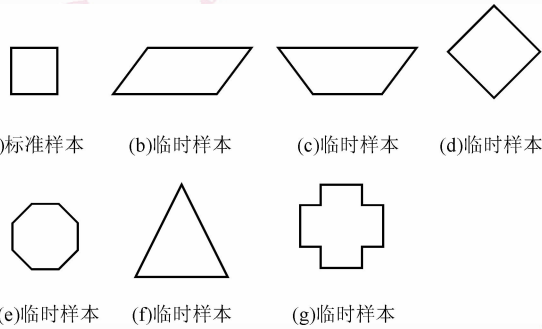


图 5 标准样本图与临时样本图的对照

Fig. 5 The comparison between standard sample and temporary sample

各表的符号说明如下:

表 1 图 4(a) 标准样本与临时样本①的比较结果

Tab. 1 The comparison result between standard sample and temporary sample①

a 的取值	对应点组数	样本图形的高度/宽度	独立跨度(标准样本/临时样本)	夹角波动方差函数值(最小值)	欧氏距离 ^a
0.1(图 4(b))	1	2.000 0/0.200 0	0.390 2/0.252 6	0.689 3	9.375.582 2
0.3(图 4(c))	1	2.000 0/0.660 0	0.390 2/0.271 0	0.686 1	14.142 1
0.6(图 4(d))	1	2.000 0/1.400 0	0.390 2/0.316 1	0.118 7	0.403 0
0.8(图 4(e))	1	2.000 0/1.600 0	0.390 2/0.351 7	0.030 2	0.077 5
0.9(图 4(f))	1	2.000 0/1.800 0	0.390 2/0.370 5	0.005 7	0.026 5
0.95(图 4(g))	1	2.000 0/1.900 0	0.390 2/0.380 0	0.002 9	0.010 0

对应点的寻找,均采用内接正方形搜索;样本高度/宽度与各图例一致,是为了在视觉上容易感觉到方法的有效性;对应点为选取的内接正方形的一个代表顶点;样本的取点为从各对应点之间依曲线或直线均匀长度取点,为了比较各样本的相似度,并保证每组图形取点数量相等(表 1 为 16 点,表 2 为 128 点,表 3 为 32 点),取点的数量将影响独立跨度和相似度值,即如果取点越多,则独立跨度越小,即对局部要求的细腻程度越高,不难知,相似度会变小,这一现象与实际的经验一致。就像用显微镜观察两个事物能更容易看出差别,是一样的道理。

表中,欧氏距离^a说明采用的是以导函数为特征^[4-6]的相似度计算方法的欧氏距离(各表取点均为 16 个,欧氏距离越小,说明相似度越高)。从理论上讲,这类方法的一个非常重要的共同特点就是所用方法只是必要性的,并没有充分性的保证(即如果两条曲线或折线是相似的,则这些性质成立;如果这些性质成立,却不能断定它们是否相似),这样就不能用这些性质来与相似进行等价判定,也就不能用它们来度量相似度。这类方法会随着图形种类的增加,将使实验数据不可避免地开始出现较大的偏差。从实验数据上看,各表的数据中已出现了比较大的偏差,且区分的有效性较差。

从表 1 的数据可见,图 4 中与标准样本(图 4(a))最接近的是图 4(g);从表 2 的数据可得到,与标准样本最接近的是正 128 边形;从表 3 的数据可见,与标准样本(图 5(a))最接近的是图 5(d)。从两个表中的数据(即匹配结果)可以看出,如果两个边缘轮廓愈接近(相似),则它们的夹角波动方差函数值就减小,并且收敛幅度与常识基本吻合,使得区分度能有效反映(有效区分)不同的图形,即说明夹角波动方差函数可以有效反映两个边缘轮廓的接近程度。

表 2 图 4(a) 标准样本与临时样本②的比较结果

Tab. 2 The comparison result between standard sample and temporary sample②

正 n 边形边数 n	对应点组数	样本图形的高度/宽度	独立跨度(标准样本/临时样本)	夹角波动方差函数值(最小值)	欧氏距离 ^a
4	2	1.000 0/1.000 0	0.390 2/0.031 3	39.126 9	1.612 2
8	2	2.414 2/2.414 2	0.196 0/0.062 5	9.561 2	0.030 8
16	4	5.027 3/5.027 3	0.098 1/0.125 0	2.159 0	0.030 6
32	8	10.153 2/10.153 2	0.049 1/0.250 0	0.308 4	0.022 6
64	16	20.355 5/20.355 5	0.024 5/0.500 0	0.205 6	0.016 0
128	32	40.735 5/40.735 5	0.012 3/1.000 0	0.000 0	0.011 4

表 3 图 5(a) 标准样本与临时样本③的比较结果

Tab. 3 The comparison result of standard sample and temporary sample③

样本代号	对应点组数	样本图形的高度/宽度	独立跨度(标准样本/临时样本)	夹角波动方差函数值(最小值)	欧氏距离 ^a
图 5(a)	2	1.000 0/1.000 0	0.125 0/0.125 0	0.000 0	0.000 0
图 5(b)	1	1.000 0/3.000 0	0.125 0/0.213 4	0.718 1	0.439 6
图 5(c)	1	1.000 0/3.000 0	0.125 0/0.213 4	0.718 1	0.481 0
图 5(d)	2	2.000 0/2.000 0	0.125 0/0.176 8	0.000 0	0.000 0
图 5(e)	2	1.414 2/1.414 2	0.125 0/0.426 8	4.934 6	0.413 7
图 5(f)	1	2.000 0/2.000 0	0.125 0/0.215 7	0.017 7	0.676 4
图 5(g)	1	2.000 0/2.000 0	0.125 0/0.250 0	19.738 4	0.307 7

5 结 论

本文利用发现的图形经过欧氏变换后的不变性质(相似夹角定理),提出了一种寻找对应特征点的普遍方法,这一方法的理论依据充分,算法简单,对图形边界的约束要求比用曲率分析的方法要松弛;在这一理论的基础上,从通过构造所得的夹角波动方差函数进行的实验结果来看,该方法能从整体上衡量图形间的相似程度,并可减弱图形局部的畸变对识别带来的影响,鲁棒性较好,而且理论获取的数据与直观经验也基本相符。这一方法对图形匹配、图形搜索、图形相似变换的有效性和聚类等与相似判定有关的问题,有一定的应用价值。

参考文献 (References)

- Li Deng-gao. Fast image registration algorithm based on randomized contour matching [J]. Tsinghua University Transaction (Natural Science), 2006, **46**(1): 29-41. [李登高. 基于随机轮廓匹配的快速图像配准算法[J]. 清华大学学报(自然科学版), 2006, **46**(1): 29-41.]
- Dou Li-hua. A method for quickly and exactly extracting imaged

detail edge [J]. Optics Technology, 2006, **32**(4): 496-499. [窦丽华. 一种快速的图像边缘精确提取算法[J]. 光学技术, 2006, **32**(4): 496-499.]

- Zhang Min. A method for automatic pick-up image contour [J]. China Science and Information, 2006, **18**(12): 156-157. [张敏. 图像轮廓自动提取的一种方法[J]. 中国科技信息, 2006, **18**(12): 156-157.]
- Nie Xu, Zhao Rong-chun, Kang Bao-sheng. A precise image registration method by utilizing the geometric feature of edges [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, **16**(12): 1668-1673. [聂焜, 赵荣椿, 康宝生. 基于边缘几何特征的图形精确相似方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, **16**(12): 1668-1673.]
- Wang Yao-ming. Autocorrelation function of outline curvature and ITS application in image recognition [J]. Computer Application and Software, 2001, **18**(2): 7-13. [王耀明. 轮廓线曲率的自相关函数及其在图像识别中的应用[J]. 计算机应用与软件, 2001, **18**(2): 7-13.]
- Shi You-xue, Luo Zhong-xue. Mosaic from different-sized images using geometric feature mapping and wavelet transform [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, **17**(4): 825-828. [石友学, 罗钟铱. 利用几何特征和小波变换实现图像的缩放匹配[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, **17**(4): 825-828.]